

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П. А. Машаров
«17» апреля 2025 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ГЕОМЕТРИЯ МАСС

| | |
|--|--------------------------------|
| Укрупненная группа направлений подготовки | 01.00.00 Математика и механика |
| Программа высшего образования | Программа магистратуры |
| Направление подготовки | 01.04.01 Математика |
| Направленность (профиль) образовательной программы | Математика |
| Квалификация | Магистр |
| Форма обучения | Очная |

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины «**Геометрия масс**» для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
д-р физ.-мат. наук, доцент

В.П. Заставный

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и
информационных технологий
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Алгебра, Аналитическая геометрия, Математический анализ, Теория меры и интеграла, Теоретическая механика.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная),
Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

| Наименование показателя | Значение показателя |
|---|---|
| Название образовательной программы (далее – ОП) | 01.04.01 Математика (Профиль: Математика) |
| Шифр и название в соответствии с учебным планом | Б1.В.ОД.3. Геометрия масс |
| Часть образовательной программы | Вариативная часть: выбор вуза |
| Количество зачетных единиц / всего часов | 4 / 144 |

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

| Форма обучения | курс | семестр | Общее количество часов | | | | | Форма контроля |
|----------------|------|---------|------------------------|--------------|--------------|-----------------------------------|-------|----------------|
| | | | лекционных | лабораторных | практических | самостоятельной работы + контроль | всего | |
| Очная | 2 | 3 | 17 | 0 | 34 | 93 | 144 | экзамен |
| Очная, всего | | | 17 | 0 | 34 | 93 | 144 | |

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Фундаментальная подготовка в области геометрии масс; овладение методами решения основных типов задач по геометрии масс; овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях; формирование у студентов научного подхода при решении теоретических и прикладных задач.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях основного общего, среднего общего образования

4.2. Индикаторы компетенций

ПК-2.3. Способен проводить занятия для обучающихся разного уровня

4.3. Результаты обучения

ПК-2.3.1. Знает особенности каждого возрастного периода детей для осуществления обучения, воспитания и развития в образовательных учреждениях общего и дополнительного образования.

ПК-2.3.2. Знает методы обучения, воспитания и развития с учетом социальных, возрастных, психофизических и индивидуальных особенностей, в том числе особых образовательных потребностей обучающихся.

ПК-2.3.3. Умеет организовать образовательный и воспитательный процессы, учитывая возрастные, социальные и психофизические особенности обучающихся.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

| Название темы | Краткое содержание темы (вопросы темы) |
|---|---|
| Раздел 1. Центр масс в случае конечной системы материальных точек | 1.1. Определение центра масс в случае конечной системы материальных точек. Основные теоремы: теорема о существовании и единственности, теорема о центре масс двух материальных точек, теорема о группировке. Координаты центра масс. 1.2. Барицентрические координаты на плоскости. 1.3. Барицентрические координаты как площади. 1.4. Теоремы Чевы и Менелая. 1.5. Момент инерции относительно точки в случае конечной системы материальных точек. Теоремы Якоби и Лагранжа. |
| Раздел 2. Центр масс в общем случае* | 2.1 Интеграл и масса. 2.2 Определение центра масс в общем случае. Случай нулевой массы. 2.3 Теоремы Гюльдена. 2.4. Центр масс усеченного конического тела. ** |
| Раздел 3. Момент инерции* | 3.1 Момент инерции относительно множества в дискретном и в общем случаях. 3.2 Момент инерции относительно точки. Теорема Лагранжа в общем случае. 3.3 Теорема о моментах инерции относительно параллельных плоских множеств. Теорема Гюйгенса-Штейнера. 3.4 Центробежный и сопряженный моменты инерции. Момент инерции относительно прямой. Оператор инерции. ** |
| Раздел 4. Поверхность инерции* | 3.1 Поверхность инерции. Гириационная поверхность инерции. Случай неотрицательной плотности. Примеры пустых поверхностей инерции. Поверхности инерции, полученные параллельным переносом. Критерий существования точек, в |

| | |
|--|---|
| | <p>которых поверхность инерции является сферой или пустым множеством. **</p> <p>3.2 Построение поверхности инерции по известной центральной поверхности инерции. Теорема Бине. **</p> |
|--|---|

* – практико-ориентированные темы.

** – вопросы, выносимые на самостоятельное изучение.

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 2, семестр – 3

| Наименования разделов и тем | Количество часов | | | | |
|---|------------------|--------|--------|-------|-------|
| | Лекц. | Лабор. | Практ. | СРС+К | Всего |
| Раздел 1. Центр масс в случае конечной системы материальных точек | 6 | | 15 | 33 | 54 |
| Раздел 2. Центр масс в общем случае* | 5 | | 12 | 24 | 41 |
| Раздел 3. Момент инерции* | 5 | | 7 | 24 | 36 |
| Раздел 4. Поверхность инерции* | 1 | | 0 | 12 | 13 |
| | | | | | |
| ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП | 17 | – | 34 | 93 | 144 |

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

1. Определение центра масс в случае конечной системы материальных точек. Основные теоремы: теорема о существовании и единственности, теорема о центре масс двух материальных точек, теорема о группировке. Координаты центра масс.
2. Барицентрические координаты на плоскости.
3. Барицентрические координаты как площади.
4. Теоремы Чевы и Менелая.
5. Момент инерции относительно точки в случае конечной системы материальных точек. Теоремы Якоби и Лагранжа.
6. Интеграл и масса.
7. Определение центра масс в общем случае. Случай нулевой массы.
8. Теоремы Гюльдена.
9. Центр масс усеченного конического тела.
10. Момент инерции относительно множества в дискретном и в общем случаях.
11. Момент инерции относительно точки. Теорема Лагранжа в общем случае.
12. Теорема о моментах инерции относительно параллельных плоских множеств. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

7.2. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике и темам:

- определение центра масс в случае конечной системы материальных точек;
- барицентрические координаты как площади;
- теоремы Чевы и Менелая;
- теоремы Гюльдена.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

7.3. Образец содержания экзаменационного билета

1. Из четырёх точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой; M и N – середины отрезков AB и CD ; K – середина отрезка MN ; P – точка пересечения медиан треугольника BCD . Докажите, что точки A, K, P принадлежат одной прямой.
2. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника BAC выбраны такие точки P и Q , что $|BP| = n|PA|$, $|AQ| = n|QC|$. В каком отношении прямая PQ делит высоту AM ?
3. Окружность, вписанная в треугольник PQR , касается сторон QR, RP, PQ соответственно в точках L, M, N . Докажите, что три отрезка PL, QM, RN имеют общую точку.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

8.1. Семестр 3

| Номера разделов | Виды работ | Максимальное количество баллов |
|-----------------------|--|--------------------------------|
| 1-3 | Организационно-учебная работа в аудитории | 15 |
| | Самостоятельная работа | 15 |
| | Контрольные работы по практике | 35 |
| | Контрольная работа по теоретическому материалу | 35 |
| ИТОГО | | 100 |
| Экзамен | | 100 |
| Общий итог за семестр | | 100 |

Соответствие баллов оценке

| Количество баллов из 100 | ECTS | Оценка по пятибалльной шкале | |
|--------------------------|------|-----------------------------------|------------|
| | | Экзамен, дифференцированный зачет | Зачет |
| 90-100 | A | отлично | зачтено |
| 80-89 | B | хорошо | зачтено |
| 75-79 | C | | зачтено |
| 70-74 | D | удовлетворительно | зачтено |
| 60-69 | E | | зачтено |
| 35-59 | FX | неудовлетворительно | не зачтено |
| 0-34 | F | | не зачтено |

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10.1. Основная литература

1. Заставный, В. П. Геометрия масс: учебное пособие / В. П. Заставный - 2-е изд., изм. и доп. - Донецк: ДонНУ, 2021. — 111 с. http://library.donnu.ru/el/ed/3912_HM6O.pdf
2. Машаров П.А. Интегралы по различным геометрическим фигурам [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / П.А. Машаров – Донецк: ДонНУ, 2017. – Электронные данные (1 файл).

10.2. Дополнительная литература

3. Павлов А. Л. Избранные разделы математики: алгебра и геометрия: учебное пособие [Электронный ресурс] / А. Л. Павлов. – Донецк : ДонНУ, 2016. – Электронные данные (1 файл).
4. Лурье, М. В. Геометрия : Техника решения задач / М. В. Лурье. - 2-е изд. - М.: Учеб.-науч. центр довуз. образования : Физматлит, 2002. - 240 с.
5. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1987. https://math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant-15/Kv61-87_Geometriya_Mass_M.B.Balk.djvu
6. Горр, Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев ; Донецкий нац. ун-т ; Ин-т прикладной математики и механики НАН. - Донецк : ДонНУ, 2010. - 364 с.

7. Гашков, С.Б. Центры тяжести и геометрия / С.Б. Гашков. – М.: МЦНМО, – 2015. – 64 с. <https://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.40.pdf>
8. Эвнин, А.Ю. Метод масс в задачах / А.Ю. Эвнин // Математическое образование – 2015. выпуск 1(73). – с. 27—47. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=15&option_lang=rus

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).